Ανάλυση LU

Ενας αντιστρέψιμος πινακας μπορει να γραφει ως γινόμενο πινάκων ως $A = P^{-1}LU$

- P ειναι ο πινακας μετάθεσης, καταγράφει τις εναλλαγές των γραμμών κατά την απαλοιφή Gauss προκύπτει από τον μοναδιαίο πινακα

- L ειναι κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο κατω από τη διαγώνιο υπάρχουν οι πολλαπλασιαστες

- U ειναι ανω τριγωνικος περιέχει το αποτέλεσμα της τριγωνοποίησης

Χρηση της μεθόδου

$A\vec{x} = \vec{b} \iff P^{-1}LU\vec{x} = \vec{b} \iff LU\vec{x} = P\vec{b}$

Πως το κατασκευάζω: $A\vec{x} = \vec{b} \iff PA\vec{x} = P\vec{b}$

- αναλύω τον PA σε γινόμενο LU
- υπολογιζω το $\vec{x}$
  - Κατασκευάζω το $P\vec{b}$
  - υπολογιζω το $U\vec{x} = \vec{y}$
    $LU\vec{x} = L\vec{y} = P\vec{b} \Rightarrow L\vec{y} = P\vec{b}$
    (μεθοδος οπισθοδρομησης)
  - $U\vec{x} = \vec{y}$ U ειναι τριγωνικος
    (μεθοδος οπισθοδρόμησης)

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Παράδειγμα

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$, να δείξετε ότι $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0.780 & 0.563 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.254 \\ 0.217 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ακολουθώ απαλοιφή Gauss: $x \cong \begin{pmatrix} -0.443 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ερώτηση: Τι λάθος έγινε? Οφείλεται στη μέθοδο ή στο ίδιο το σύστημα?

Το σύστημα έχει κακή κατάσταση. Θα πρέπει να μιλήσουμε για την έννοια "κατάσταση" γραμμικών συστημάτων.

Νόρμες διανυσματικών και πινάκων

Οι νόρμες (norm, στάθμη) αποτελούν γενίκευση της απόλυτης τιμής.

Διανύσματα

Ορισμός: Έστω X ένας γραμμικός διανυσματικός χώρος στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$. Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \|x\|$$

καλείται νόρμα αν:

(a) $\forall x \in X$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x \in X$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(c) $\forall x, y \in X$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα)

Παρατηρήσεις

1. $\forall x \in X \quad \|x\| \geq 0$

Απόδειξη: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ διαλέγω $y=-x$

$$\Rightarrow \|x-x\| \leq \|x\| + \|-x\| \overset{(b)}{=} \|x\| + |-1| \cdot \|x\|$$

$$= \|x\| + \|x\| = 2\|x\|$$

$$\|x-x\| = \|0\| \overset{(a)}{=} 0$$

Συνεπώς $\quad 0 \leq 2\|x\|$

2. (Άσκηση) $\forall x,y \in X : \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$

Παραδείγματα

1. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ $\quad \|x\| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ $\quad \|z\| = |z|$ μέτρο του z $\forall z \in \mathbb{C}$

2. Γενικότερα στον $\mathbb{R}^n$ $\quad \|\vec{x}\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3. Γενικότερα $1 \le p < \infty$

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p}$$

Δλδ αν $p=2, \dots$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$
προφανώς συνδέεται με το
προφανώς συνδέεται με το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο

$$\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \|x\|_2$$

4. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$ (l_∞ - νόρμα νόρμα μεγίστου)

Άσκηση Να δείξετε ότι το l_∞-norm είναι νόρμα.

5. Ανισότητα Cauchy-Schwarz
$\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

6. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, $p=1,2,\dots\infty$ όπως προηγουμένως!

Εσωτερικό γινόμενο: $\langle x,y\rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$

$\bar{y}_i$ συζυγής μιγαδικός

<u>Ισοδύναμες ή συγκρίσιμες νόρμες</u>
Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ στον X λέγονται ισοδύναμες αν $\exists\, m, M > 0 : \forall x \in X : m\|x\| \le \|x\|' \le M\|x\|$
$\Longleftrightarrow \frac{1}{M}\|x\|' \le \|x\| \le \frac{1}{m}\|x\|'$

Στον $\mathbb{R}^n$ όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες (όπως και σε κάθε χώρο πεπερασμένης διάστασης)

<u>Σύγκλιση ακολουθίας</u>
Μια ακολουθία $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ συγκλίνει ως προς μια νόρμα $\|\cdot\|$ του X αν $\exists x \in X$ (το όριο της ακολουθίας ως προς $\|\cdot\|$). $\|x^{(n)} - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Συμβολίζουμε: $x^{(n)} \to x$, $n \to \infty$ (ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$)

<u>Παρατήρηση:</u> – Σύγκλιση μιας ακολουθίας ως προς μια νόρμα συνεπάγεται σύγκλιση της ίδιας ακολουθίας ως προς οποιαδήποτε ισοδύναμη νόρμα

- Στην $\mathbb{R}^n$ η σύγκλιση μιας ακολουθίας $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα $x\in\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση ως προς τη νόρμα μεγίστου.

<u>Πλήρεις χώροι</u>

Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy ως προς την $\|\cdot\|$ συγκλίνει, δηλ $\forall \{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq N \quad \|x^{(m)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \exists x \in X \quad \lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$$

Πληρότητα του $\mathbb{R}^n$

Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης